

# Determinación de la instrumentación óptima para un sistema

**Autores:** Enrique E. Tarifa<sup>1,2</sup>, Sergio L. Martínez<sup>2,3</sup> y Samuel Franco Domínguez<sup>2</sup>

(1) CONICET.

(2) Universidad Nacional de Jujuy, Facultad de Ingeniería, Ítalo Palanca N°10 - 4600 San Salvador de Jujuy, Argentina.

(3) Universidad Católica de Santiago del Estero, Departamento Académico San Salvador, Lavalle N°333 - 4600 San Salvador de Jujuy, Argentina.

\*autor de contacto (e-mail: [ectarifa@gmail.com](mailto:ectarifa@gmail.com))

Enrique E. Tarifa

Ingeniero Químico (UNJu). Doctor en Ingeniería Química (UNL). Profesor Titular en la Facultad de Ingeniería de la UNJu. Investigador Independiente de CONICET.

Samuel Franco Domínguez:

Ingeniero Químico (UNJu). Profesor Adjunto en la Facultad de Ingeniería de la UNJu.

Sergio L. Martínez:

Ingeniero Electrónico (UTN). Especialista en Enseñanza de la Educación Superior (Universidad Católica de Cuyo). Magister en Ingeniería Electrónica (UNT). Profesor Adjunto en la Facultad de Ingeniería de la UNJu. Profesor Titular en el Departamento Académico San Salvador (UCSE).

## Resumen

En la operación de plantas químicas, es de fundamental importancia tener un conocimiento lo más completo y exacto posible del estado del proceso que se está supervisando; para ello, se instalan sensores en puntos específicos de la planta. La calidad de los datos así recolectados no tiene la exactitud ni la precisión requeridas para utilizarlos directamente; por ese motivo, se emplean diversas técnicas de procesamiento con el fin de lograr una estimación correcta del estado del proceso. En este trabajo, se presenta un método para determinar la cantidad y localización de sensores en un sistema para estimar con la máxima precisión las variables y los parámetros del mismo, manteniendo al mínimo el costo total de la instrumentación. El método propuesto emplea dos modelos de optimización anidados. Además, se presenta también un modelo simplificado que es válido bajo condiciones que normalmente se cumplen. Este modelo simplificado es aplicado en un ejemplo. Los resultados obtenidos muestran el gran impacto que el método propuesto puede tener en la calidad de la estimación producida, como así también en la reducción del costo de la instrumentación requerida.

## Palabras clave

instrumentación; optimización; estimación de parámetros; estimación de variables

## Determining the optimal instrumentation for a system

### *Abstract*

*In the operation of chemical plants, it is of fundamental importance to have a knowledge as complete and accurate as possible of the process state being monitored; For this purpose, sensors are installed at specific points in the plant. The quality of the data thus collected does not have the accuracy nor precision required to use them directly; for this reason, various processing techniques are used in order to achieve a correct estimation of the process state. In this paper, we present a method to determine the amount and location of sensors in a system to estimate their variables and parameters with maximum precision, keeping the total cost of the instrumentation to a minimum. The proposed method employs two nested optimization models. In addition, a simplified model is also presented that is valid under conditions that are normally met. This simplified model is applied in an example. The results obtained show the great impact that the proposed method can have on the quality of the estimation produced, as well as on the reduction of the cost of the required instrumentation.*



## Key words

*instrumentation; optimization parameter estimation; estimation of variables*

## Introducción

La industria química representa un sector importante en la economía mundial. Debido a esto, continuamente se desarrollan métodos para mejorar el diseño y la operación de las plantas químicas. Una operación segura y eficiente garantiza la calidad de los productos, mantiene la viabilidad económica, la competitividad del negocio, y reduce el impacto ambiental. Para operar adecuadamente una planta química, es necesario contar con información correcta sobre los valores que adoptan las variables y los parámetros del sistema; es decir, es necesario conocer el estado del proceso que se lleva a cabo en el sistema bajo supervisión. Para ello, se instalan instrumentos que miden determinadas variables en determinados lugares; también, se recurre a la extracción de muestras para analizarlas en laboratorio. En general, las mediciones así obtenidas son de baja calidad en el sentido de que están afectadas por errores aleatorios, errores gruesos (outliers) de diversos tipos (por ejemplo, valores picos o saltos en el valor de la media de una variable) y valores ausentes o perdidos. Uno de los primeros pasos de cualquier análisis, por tanto, debe tender a la llamada “rectificación de los datos”, que consiste en estimar los valores verdaderos (libres de errores) de las variables del proceso, a partir de las mediciones del proceso. Dicha tarea es clave, ya que si se logran minimizar los errores, los datos resultantes conducirán a mejores resultados en las aplicaciones que los utilicen (Edgar et al., 2001; Abu-el-zeet et al., 2002; Amand et al., 2001). Los desarrollos en esta área surgieron a lo largo de las cuatro últimas décadas, y pueden dividirse en dos grandes grupos (Tona Vázquez, 2006): métodos de rectificación basados en modelos y métodos de rectificación basados en filtros univariable. En el primer grupo, la rectificación se orienta a estimar los valores reales de las variables de modo tal que los estimados resultantes sean consistentes con un modelo riguroso del proceso. Los desarrollos en esta área se agrupan bajo el nombre de reconciliación de datos. Existen muchas aplicaciones de la reconciliación de datos en la industria que emplean un modelo estacionario —que considera que las variables del proceso no evolucionan con el tiempo— (Narasimhan y Jordache, 2000; Romagnoli y Sánchez, 2000; Lid y Skogestad, 2008). En dichas aplicaciones, se supone que la instrumentación de la planta está definida; por lo tanto, el problema es estimar el estado del proceso a partir de las lecturas que brindan los instrumentos ya instalados.

En este trabajo, se presenta un método que determina la instrumentación óptima para estimar los valores de las variables (medidas y no medidas) y de los parámetros de un proceso en estado estacionario con la máxima precisión y el mínimo costo. Para ello, se desarrolla un modelo riguroso del proceso; ese modelo es utilizado para determinar los valores de referencia a emplear para

evaluar las estimaciones. En los casos en que no se pueda afrontar el costo de desarrollo de un modelo riguroso, se puede recurrir al estudio de los registros históricos o a la realización de análisis de laboratorio para obtener los valores de referencia citados.

Si se desarrolla un modelo riguroso para estimar los valores de referencia, ese modelo puede ser también empleado para producir las estimaciones. Sin embargo, la complejidad del modelo riguroso puede resultar en un costo elevado de utilización (elevado tiempo de cálculo, necesidad de contar con computadoras más potentes, necesidad de desarrollar algoritmos de resolución más potentes, etc.). Por ese motivo, en este trabajo, además se analiza el caso en que se emplea un modelo simplificado para generar las estimaciones.

El método propuesto plantea un problema de optimización cuyas variables de decisión determinan el grado de instrumentación del proceso necesario para minimizar la varianza de las estimaciones (maximizar la precisión) y minimizar el costo de la instrumentación requerida. Las restricciones están conformadas por otro problema de optimización que permite estimar la varianza de las estimaciones para cada instrumentación probada. Es otras palabras, el método propuesto utiliza dos modelos, uno anidado dentro del otro. El modelo interno es el modelo de reconciliación de datos que, para una instrumentación dada, realiza la mejor estimación de las variables y parámetros del proceso, devolviendo como resultado la varianza de las estimaciones. El modelo externo, determina la instrumentación que permite minimizar la varianza de las estimaciones reportadas por el modelo interno, al tiempo que minimiza el costo de la instrumentación requerida.

## Modelo de reconciliación de datos

Un sistema en estado estacionario puede ser modelado con un sistema de ecuaciones algebraicas de la siguiente forma:

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

donde  $x$  es el vector de variables a estimar del sistema y  $f$  es un vector de funciones linealmente independientes. El grado de libertad  $l$  de este sistema de ecuaciones está determinado por la diferencia entre cantidad de incógnitas y la cantidad de ecuaciones, esto es:

$$l = \dim(x) - \dim(f) \quad (2)$$

donde  $\dim(\cdot)$  es la función que devuelve la dimensión del vector argumento.

Para que el sistema de ecuaciones pueda ser resuelto, es necesario que el grado de libertad sea nulo. Se puede disminuir el grado de libertad incorporando sensores o realizando experiencias de laboratorio para medir algunas variables (en adelante sólo se trabajará con sensores, pero la extensión a otro tipo de mediciones es directa). El grado de libertad nulo es una condición necesaria pero no suficiente para la resolución del sistema de ecuaciones; en otras palabras, no basta con dar la

cantidad de datos necesaria sino que también es preciso que los datos correspondan a determinadas variables. Por ejemplo, en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -x + y + z - 4 &= 0 \\ x + y + z - 6 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

el grado de libertad es  $3 - 2 = 1$ ; por lo tanto, basta con medir una variable para anular el grado de libertad. Sin embargo, si se mide  $x$ , no pueden determinarse los valores de las restantes variables. En cambio, sí es posible resolver el sistema de ecuaciones si se especifica  $y$  o se especifica  $z$ , produciendo la solución  $x=1, y=2, z=3$ .

Si el sistema de ecuaciones puede resolverse, las incógnitas asumirán valores que harán que todas las ecuaciones se verifiquen; pero debe tenerse en cuenta que la calidad de la solución dependerá de la calidad de la información incorporada para anular el grado de libertad. Generalmente, las lecturas de los sensores no son exactas ni precisas, tienen asociado un cierto error; por lo tanto, ese error se propagará hacia las incógnitas, afectando así a la calidad de la solución. El efecto de los errores de los datos puede atenuarse incorporando datos redundantes; esto es, incorporando más información que la necesaria para resolver el sistema de ecuaciones, haciendo que el grado de libertad sea negativo. En ese caso, conviene definir el grado de redundancia  $r = -l$ .

Si se cuenta con información redundante, que vuelve negativo al grado de libertad, el sistema de ecuaciones queda sobredeterminado, y no es posible resolverlo. Para poder aprovechar la información redundante, se recurre al ajuste por mínimos cuadrados. El problema general de ajuste por mínimos cuadrados tiene la siguiente forma:

$$\text{Min}_x (y - Ax)^T (y - Ax) \quad (4)$$

donde tanto el vector  $y$  como la matriz  $A$  son datos. Aplicando las condiciones necesarias que debe cumplir un punto óptimo, se llega la ecuación normal de Gauss:

$$A^T Ax = A^T y \quad (5)$$

De esta ecuación se deduce que la condición necesaria y suficiente para que la solución exista y sea única es:

$$\text{rango}(A) = \text{dim}(x) \quad (6)$$

Si el  $\text{rango}(A)$  —cantidad de filas independientes— es menor que  $\text{dim}(x)$ , existirán infinitas soluciones.

El primer modelo de este trabajo surge de adaptar el problema general de ajuste por mínimos cuadrados de la siguiente forma:

$$\text{Min}_{x,e} e^T e \quad (7)$$

s.a:

$$e = \begin{pmatrix} \text{diag}(ws)\text{diag}(z)(s-x) \\ -\text{diag}(wf)f(x) \end{pmatrix}$$

donde  $x$  sigue siendo el vector de variables pero esta vez incluye también a los parámetros del sistema;  $s_j$  es el valor reportado por el sensor instalado para medir  $x_j$ , si no es factible instalar un sensor para dicha variable,  $s_j = 0$ . El vector de errores  $e$  está compuesto por dos partes, la primera mide el error de los sensores, la segunda mide el error de las restricciones. La función  $\text{diag}(v)$  devuelve la matriz diagonal que tiene los componentes del vector  $v$  en la diagonal. El vector  $ws$  contiene los pesos asignados a los sensores; generalmente, el peso de un sensor es la inversa de la desviación estándar o error correspondiente, y será igual a la unidad si la variable no es factible de ser medida. El vector  $wf$  contiene los pesos asignados a las ecuaciones del modelo estacionario del sistema; generalmente, el peso de una ecuación es la inversa de la desviación estándar o del error correspondiente en el estado de referencia (más adelante se explica cómo se calcula dicho estado). En el caso ideal, las citadas ecuaciones deberían ser iguales a cero; sin embargo, debido a las aproximaciones que se realizan al modelar un proceso se debe esperar que las ecuaciones se cumplan con un cierto error, cuya magnitud trata de minimizar el modelo de reconciliación. El vector  $z$  está definido por la instrumentación instalada, siendo  $z_j$  igual a uno si  $x_j$  es medida, y nulo si  $x_j$  no es medida.

La resolución del problema presentado produce la mejor estimación posible de  $x$  y  $e$  para una instrumentación dada especificada en  $z$ . Si la solución es única para  $x$ , se dice que el sistema es globalmente estimable. Para deducir las condiciones que deben cumplirse para que el sistema sea globalmente estimable, se linealizan las restricciones alrededor de  $x_0$ :

$$\text{Min}_{x,e} e^T e \quad (8)$$

s.a:

$$e = \begin{pmatrix} \text{diag}(ws)\text{diag}(z)(s-x) \\ -\text{diag}(wf)(f(x_0) + J(x_0)(x-x_0)) \end{pmatrix}$$

donde  $J(x_0) = f'(x_0)$  es el jacobiano o matriz jacobiana, cuyo elemento  $(i, j)$  es la derivada parcial, evaluada en  $x_0$ , de  $f_i$  con respecto a  $x_j$ . El punto  $x_0$ , alrededor del cual se realiza la linealización, debe estar próximo al estado estacionario que se está estimando, es el estado de referencia. Si no se dispone de un buen punto de partida, se puede resolver el problema en forma iterativa, actualizando en cada iteración el punto  $x_0$  con la solución  $x$  hasta alcanzar un error aceptable. En este trabajo, el estado de referencia  $x_0$  es obtenido por

simulación utilizando un modelo riguroso.

Comparando el modelo planteado en (8) con el modelo planteado en (4), se tiene que:

$$y = \begin{pmatrix} \text{diag}(ws)\text{diag}(z)s \\ \text{diag}(wf)(J(xo)xo - f(xo)) \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$A = \begin{pmatrix} \text{diag}(ws)\text{diag}(z) \\ \text{diag}(wf)J(xo) \end{pmatrix} \quad (10)$$

Por lo tanto, la condición necesaria y suficiente para que exista una solución, sea única y, por lo tanto, el sistema sea globalmente estimable es:

$$(11)$$

donde  $\text{diag}(z)$  y  $J(xo)$  están multiplicadas por matrices diagonales, lo cual es equivalente a multiplicar cada línea de esas dos matrices por una constante. Dicha multiplicación no altera el rango de la matriz global; por lo tanto, para que el sistema sea globalmente estimable, basta que se cumpla:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} \text{diag}(z) \\ J(xo) \end{pmatrix} = \dim(x) \quad (12)$$

Para simplificar el cálculo de la última ecuación, se utilizará la siguiente identidad:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} \text{diag}(z) \\ J(xo) \end{pmatrix} = \text{rango}(J(xo)(I - \text{diag}(z))) + \|z\|_1 \quad (13)$$

donde  $I$  es la matriz identidad de la misma dimensión que  $\text{diag}(z)$ , y  $\|z\|_1$  es la norma 1 del vector  $z$  (igual a la suma de los valores absolutos de los componentes de  $z$ ). El resultado del producto  $J(xo)(I - \text{diag}(z))$  anula las columnas correspondientes a las variables medidas en la matriz  $J(xo)$ . Se debe notar que la exactitud de la expresión aumentará a medida que  $xo$  tienda a  $x$  ya que la condición que está siendo evaluada proviene de linealizar el modelo no lineal original alrededor de  $xo$ . Por lo tanto, la condición para que el sistema sea globalmente estimable queda expresada de la siguiente manera:

$$\text{rango}(J(xo)(I - \text{diag}(z))) + \|z\|_1 = \dim(x) \quad (14)$$

Para asegurar el cumplimiento de la condición necesaria y suficiente, sólo puede modificarse el vector  $z$ , el cual está determinado por la instrumentación instalada. Por lo

tanto, cuando se analizan distintas alternativas de instrumentación, se deben considerar sólo aquellas que satisfagan la citada condición.

## Modelo para determinar la instrumentación óptima

El modelo de estimación presentado en la sección anterior es el modelo interno del método propuesto. Ese modelo necesita que se especifique la instrumentación instalada a través de  $z$ . Esa es la tarea del modelo externo que se describe en esta sección, el cual deberá evaluar distintas instrumentaciones factibles para encontrar aquella que minimice la varianza de las estimaciones y el costo de la instrumentación requerida.

El planteo formal del modelo genera un problema de optimización multiobjetivo para minimizar la máxima varianza relativa  $vt$  de las estimaciones y el costo  $ct$  de la instrumentación requerida:

$$\begin{aligned} & \text{Min}_{v, w, ct} (vt, ct)^T & (15) \\ \text{s.a:} & \\ vt &= \max_j \{w_j\} \\ ct &= c^T z \\ w_j &= \frac{\text{Var}(x_j)}{x_0^2} \quad \forall j \\ z_j &\in \{0, 1\} \quad \forall j \\ \text{rango}(J(x_0)(I - \text{diag}(z))) + \|z\|_1 &= \text{dim}(x) \\ r &= \text{dim}(\text{filas}(J(x_0))) + \|z\|_1 - \text{dim}(x) \\ r &\geq 1 \\ \overline{\text{Var}(x)} &= \text{VarEstim}(z) \end{aligned}$$

donde, esta vez, los elementos del vector  $z$  son variables, siendo  $z_j$  una variable binaria que vale 1 si  $x_j$  se considera medida, si no  $z_j = 0$ . En este modelo también se consideran los costos de instrumentación al incorporar  $c_j$  como el costo de instalación del sensor para medir  $x_j$ ; si técnicamente una variable no puede ser medida, entonces se debe asignar un valor alto al costo correspondiente. A fin de considerar sólo las instalaciones que permitan que el sistema sea globalmente estimable, se incorpora como restricción la condición necesaria y suficiente analizada anteriormente evaluada en  $x_0$ . Se incorpora también una restricción que permite calcular el grado de redundancia  $r$ , el que se define como  $r = -l$ , y una restricción adicional que exige que  $r \geq 1$  para que exista la redundancia de información requerida por la reconciliación de datos. La función  $\text{filas}(M)$  devuelve la cantidad de filas de la matriz  $M$ . El

operador hace que una función escalar se aplique a cada elemento del vector o matriz argumento, produciendo otro vector o matriz de igual dimensión. La función  $\max(x_j)$  devuelve el  $x_j$  con máximo valor. La función  $\text{Var}(x_j)$  es la varianza de  $x_j$ , y se la obtiene a través del vector de funciones  $\text{VarEstim}(z)$  que representa a la varianza de las estimaciones obtenidas de resolver el modelo de estimación —el modelo interno— para una instrumentación definida por  $z$ .

Presentados el modelo interno y el externo, puede plantearse la estrategia general del método propuesto:

1. Obtener el valor de referencia  $x_0$  que representa un estado estacionario conocido en forma completa y exacta. Este punto puede obtenerse utilizando un modelo riguroso o registros históricos del sistema.
2. Determinar las distribuciones de probabilidad asociadas a las lecturas de todos los sensores factibles de ser instalados.
3. Implementar el vector de funciones  $\text{VarEstim}(z)$ . Esta función puede ser implementada utilizando simulación de Monte Carlo. En esa simulación, para cada sensor contemplado en  $z$ , se genera un valor de lectura utilizando la distribución de probabilidad correspondiente, se resuelve el modelo de estimación —el modelo interno—, y se obtiene una estimación de  $x$ . Repitiendo el proceso descrito, se construye un conjunto muestral de valores de  $x$ . Estudiando la muestra así conseguida, se estima la varianza asociada a  $x$  para la instrumentación definida en  $z$ .
4. Resolver el modelo externo para determinar la instrumentación óptima.

## Modelo simplificado

La estrategia propuesta en la sección anterior tiene un paso que demanda un considerable poder de cómputo: la simulación de Monte Carlo. En esta sección, se presenta un modelo simplificado que permite la resolución del problema con suficiente exactitud. El punto de partida para realizar la citada simplificación son las propiedades de la esperanza y la varianza que se analizan a continuación.

Sea  $x$  una variable aleatoria que se obtiene de sumar  $m$  variables aleatorias  $s_j$  ponderadas por los coeficientes  $a_j$ , esto es:

$$x = \sum_{j=1}^m a_j s_j \tag{16}$$

Los parámetros estadísticos de  $x$  se vinculan con los correspondientes a las  $s_j$  de la siguiente manera:

$$E(x) = \sum_{j=1}^m a_j E(s_j) \tag{17}$$

$$\text{Var}(x) = \sum_{j=1}^m a_j^2 \text{Var}(s_j) + 2 \sum_{j=1}^m \sum_{k=j-1}^m a_j a_k \text{Cov}(s_j, s_k) \quad (18)$$

donde  $E(x)$  es la esperanza de  $x$ ,  $\text{Var}(x)$  es la varianza de  $x$ , y  $\text{Cov}(s_j, s_k)$  es la covarianza entre  $s_j$  y  $s_k$ .

Si las  $s_j$  son independientes, se tiene:

$$\text{Var}(x) = \sum_{j=1}^m a_j^2 \text{Var}(s_j) \quad (19)$$

Para continuar con la simplificación, se adopta el modelo de estimación linealizado, ec. (8). La solución de ese modelo se obtiene resolviendo el sistema lineal de ecuaciones planteado por la condición normal de Gauss, ec. (5):

$$x = (A^T A)^{-1} A^T y \quad (20)$$

Aplicando la propiedad de la varianza expresada en la ec. (19) a la solución del sistema lineal, se obtiene la varianza de  $x$  en función de la varianza de  $y$ :

$$\overline{\text{Var}(x)} = \left( (A^T A)^{-1} A^T \right)^2 \overline{\text{Var}(y)} \quad (21)$$

Aplicando nuevamente la propiedad de la varianza expresada en la ec. (19) a la ec. (9), se obtiene la varianza de  $y$  en función de la varianza de las mediciones  $s$ :

$$(22)$$

donde  $\text{Var}(s_j)$  es la varianza del sensor  $j$ , y vale cero si  $x_j$  no es factible de ser medida.

Combinando las ecs. (10), (21) y la (22), es posible estimar la varianza de  $x$  en función de la varianza de las mediciones  $s$ . Por lo tanto, esas tres ecuaciones son una buena aproximación de la función vectorial  $\text{VarEstim}(z)$  que figura en la última restricción del modelo para determinar la instrumentación óptima —modelo externo—, ec. (15). Realizado ese reemplazo, se obtiene el modelo simplificado para determinar la instrumentación óptima:

$$\begin{aligned} & \text{Min}_{z_j} (vt, ct)^T \\ & \text{s.a:} \\ & vt = \max_j \{vr_j\} \\ & ct = c^T z \\ & vr_j = \frac{\text{Var}(x_j)}{x\sigma_j^2} \quad \forall j \\ & z_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \\ & \text{rango}(J(x_0)(I - \text{diag}(z))) + \|z\| = \text{dim}(x) \end{aligned} \quad (23)$$

$$r = \dim(\text{filas}(J(x_0))) + \|z\|_1 - \dim(x)$$

$$r \geq 1$$

$$\overline{\text{Var}(x)} = \left( \overline{(A^T A)^{-1} A^T} \right) \overline{\text{Var}(y)}$$

$$\overline{\text{Var}(y)} = \left( \begin{array}{c} \overline{(\text{diag}(ws)\text{diag}(z))^2} \overline{\text{Var}(s)} \\ wf \ 0 \end{array} \right)$$

$$A = \left( \begin{array}{c} \text{diag}(ws)\text{diag}(z) \\ \text{diag}(wf)J(x_0) \end{array} \right)$$

donde se explicita que las únicas variables de decisión independientes son las componentes del vector  $z$ .

El problema así planteado es un problema de optimización multiobjetivo. Existen varios métodos para resolver este tipo de problema. En la sección siguiente, se presentará un ejemplo que se resolverá empleando un método basado en la eficiencia de Pareto. Enunciado por Vilfredo Pareto, el concepto de eficiencia de Pareto (también llamado óptimo de Pareto, Pareto-óptimo u óptimo paretiano) es aquella situación en la cual se cumple que no es posible beneficiar a un objetivo del problema sin perjudicar a los otros objetivos.

## Aplicación a un intercambiador de calor

En el intercambiador de calor de la Figura 1, un caudal  $F_{pi}$  de una corriente de proceso es calentado por un caudal  $F_{si}$  de una corriente de servicio. Ambas corrientes contienen sólo agua. El intercambiador tiene un único paso por tubo y coraza en contracorriente. La tabla 1 presenta los valores reportados por sensores ideales (sin errores), esas lecturas fueron obtenidas simulando el proceso con el simulador HYSYS. La tabla 2 muestra los valores reportados por sensores no ideales (con errores), esas lecturas fueron generadas sumando a la lectura de cada sensor ideal un número aleatorio perteneciente al intervalo  $(-Error, Error]$  con  $Error$  equivalente al 5% de los valores correspondientes de las corrientes de entrada. La tabla 2 también muestra el valor de la desviación estándar para cada sensor, la cual se calcula como la raíz cuadrada de la varianza, y ésta a su vez se obtiene al considerar que la varianza de una distribución uniforme entre  $a$  y  $b$  es  $(b - a)^2/12$ . La tabla 3 contiene los valores reportados para las variables que se consideran no medibles en el intercambiador, ellas son el flujo de calor  $Q$  y el producto del coeficiente global de transferencia de calor por el área de transferencia de calor  $UA$ . Los datos de la tabla 1 y de la tabla 3 definen el estado de referencia  $x_0$ .

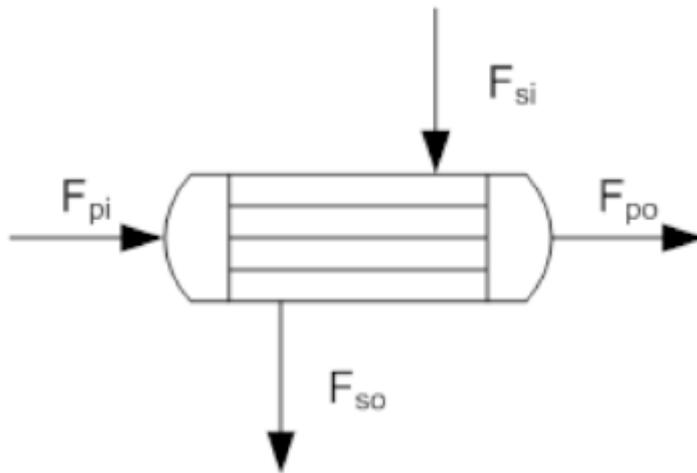


Fig. 1: Intercambiador de calor con un paso por tubo y coraza en contracorriente.

Tabla 1: Lecturas de sensores ideales en el intercambiador de calor.

Sensores	pi	po	si	so	Error	DE
$F$ (m <sup>3</sup> /h)	2.00	2.00	2.00	2.00	0.00	0.00
$T$ (°C)	40.00	55.00	65.00	50.00	0.00	0.00

Tabla 2: Lecturas de sensores con errores en el intercambiador de calor.

Sensores	pi	po	si	so	Error	DE
$F$ (m <sup>3</sup> /h)	2.05	2.02	2.08	2.01	0.10	$5.77 \times 10^{-2}$
$T$ (°C)	38.73	55.21	63.70	48.75	2.00	1.15

Tabla 3: Variables que se consideran no medibles en el intercambiador de calor.

$Q$ (kJ/h)	$UA$ (kJ/(h·°C))
$1.252 \times 10^5$	$1.252 \times 10^4$

El modelo para este sistema es:

$$\begin{aligned}
 Q - UA \Delta T_{ml} &= 0 \\
 \Delta T_{ml} - \frac{(T_{so} - T_{pi})(T_{si} - T_{po})}{\ln\left(\frac{T_{so} - T_{pi}}{T_{si} - T_{po}}\right)} &= 0
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
 Q - F_{pi} \rho C_p (T_{po} - T_{pi}) &= 0 \\
 Q + F_{si} \rho C_p (T_{so} - T_{si}) &= 0 \\
 F_{po} - F_{pi} &= 0 \\
 F_{so} - F_{si} &= 0
 \end{aligned}$$

donde  $Q$  es el flujo de calor,  $UA$  es el producto del coeficiente global de transferencia de calor con el área de transferencia de calor,  $\Delta T_{ml}$  es la diferencia de temperatura media logarítmica,  $F$  es caudal,  $T$  es temperatura,  $\rho$  es la densidad del agua (1000 kg/m<sup>3</sup>) y  $C_p$  es la capacidad calorífica específica del agua (4.187 kJ/(kg°C)).

El modelo se puede simplificar si se considera que, para el rango de temperaturas presentes, la diferencia media logarítmica de temperaturas puede aproximarse por la diferencia promedio. Por otra parte, en este ejemplo, no se desea estimar el valor de la diferencia de temperaturas; por lo tanto, esa variable puede ser eliminada. Con estas consideraciones, el modelo simplificado es:

$$Q - UA \frac{(T_{so} - T_{pi}) + (T_{si} - T_{po})}{2} = 0 \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 Q - F_{pi} \rho C_p (T_{po} - T_{pi}) &= 0 \\
 Q + F_{si} \rho C_p (T_{so} - T_{si}) &= 0 \\
 F_{po} - F_{pi} &= 0 \\
 F_{so} - F_{si} &= 0
 \end{aligned}$$

Comparando este modelo con el modelo de estimación propuesto, ec.(7), se tiene que las matrices del modelo de estimación están definidas como sigue:

$$x = (F_{pi} \quad T_{pi} \quad F_{po} \quad T_{po} \quad F_{si} \quad T_{si} \quad F_{so} \quad T_{so} \quad Q \quad UA)^T \tag{26}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} Q - UA \frac{(T_{so} - T_{pi}) + (T_{si} - T_{po})}{2} \\ Q - F_{pi} \rho C_p (T_{po} - T_{pi}) \\ Q + F_{si} \rho C_p (T_{so} - T_{si}) \\ F_{po} - F_{pi} \\ F_{so} - F_{si} \end{pmatrix} \tag{27}$$

Los datos para completar el modelo son:

$$c = (2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 3 \ 2 \ 3 \ 2 \ 100 \ 100)^T \quad (28)$$

$$s = (2.05 \ 38.73 \ 2.02 \ 55.21 \ 2.08 \ 63.70 \ 2.01 \ 48.75 \ 0 \ 0)^T \quad (29)$$

$$w_s = (10 \ 0.5 \ 10 \ 0.5 \ 10 \ 0.5 \ 10 \ 0.5 \ 1 \ 1)^T \quad (30)$$

$$w_f = (6 \times 10^{-4} \ 6 \times 10^{-4} \ 6 \times 10^{-4} \ 10 \ 10)^T \quad (31)$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\rho C_p (T_{pi} - T_{pi}) & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} UA & F_{pi} \rho C_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} UA & -F_{pi} \rho C_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho C_p (T_{so} - T_{si}) & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} UA & 0 & -F_{si} \rho C_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} UA & 0 & F_{si} \rho C_p & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(T_{so} - T_{pi}) + (T_{si} - T_{po})}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \quad (32)$$

El costo de colocar todos los sensores posibles sería  $2+1+2+1+3+2+3+2 = 16$ .

El modelo para determinar la instrumentación óptima —modelo externo— fue implementado en el utilitario matemático MathCad. La Figura 2 presenta los puntos óptimos de Pareto obtenidos para la instrumentación del intercambiador de calor. Por ser óptimos de Pareto, existen dos interpretaciones para los puntos de la Figura 2: 1) cada punto tiene como coordenada la mínima desviación estándar  $DE\% = 100vt0.5$  para el costo dado de instrumentación  $ct$ , 2) cada punto tiene como coordenada el mínimo costo de instrumentación  $ct$  para obtener la desviación especificada por  $DE\%$ . Como es de esperar, la desviación estándar de la estimación aumenta a medida que disminuye la inversión en instrumentación, alcanzando el mínimo valor en  $ct = 16$ . Sin embargo, es posible reducir la inversión hasta 11 sin un aumento apreciable en la desviación estándar. La instrumentación correspondiente a  $ct = 11$  y  $DE\% = 14.00\%$  se presenta en la tabla 4.

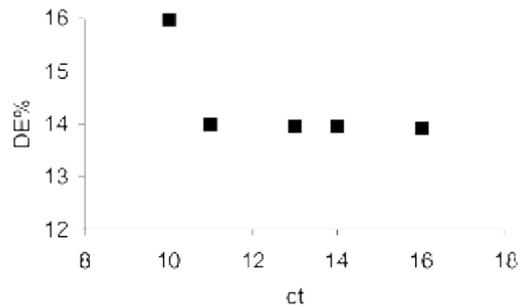


Fig. 2: Puntos óptimos de Pareto para la instrumentación del intercambiador de calor.

A fin de verificar la bondad de la instrumentación recomendada por el modelo simplificado, con ella se llevó a cabo la estimación de las variables y de los parámetros del sistema empleando el modelo interno del método riguroso. El modelo de estimación —modelo interno— fue implementado en el utilitario matemático LINGO. La tabla 5 y la tabla 6 presentan las estimaciones obtenidas para el intercambiador de calor. La tabla 7 y la tabla 8 presentan los errores de las estimaciones realizadas con respecto al estado de referencia  $x_0$ .

Tabla 4: Sensores colocados en el intercambiador de calor.

Sensores	pi	po	si	so
$F$ (m <sup>3</sup> /h)	Sí	No	Sí	No
$T$ (°C)	Sí	Sí	Sí	Sí

Tabla 5: Estimaciones para las variables del intercambiador de calor.

Sensores	pi	po	si	so
$F$ (m <sup>3</sup> /h)	2.04	2.04	2.09	2.09
$T$ (°C)	39.03	54.91	64.01	48.45

Tabla 6: Valores estimados para el intercambiador de calor.

$DE\%$	$ct$	$Q$ (kJ/h)	$UA$ (kJ/(h·°C))
14.00	11	$1.359 \times 10^9$	$1.468 \times 10^4$

Tabla 7: Errores en % para las estimaciones de las variables del intercambiador de calor.

Sensores	pi	po	si	so
$F$	2.00	2.00	4.50	4.50
$T$	-2.43	-0.16	-1.52	-3.10

Tabla 8: Errores en % de los valores estimados para el intercambiador de calor.

$Q$	$UA$
8.55	17.25

La importancia del modelo presentado es evidente si se analiza el dramático efecto de reducir en una unidad la inversión en instrumentación, haciendo  $ct = 10$ . Los resultados correspondientes se presentan desde la tabla 9 a la tabla 13. En este caso, es notable el gran deterioro que sufre la calidad de las estimaciones producidas.

Tabla 9: Sensores colocados en el intercambiador de calor.

Sensores	pi	po	si	so
$F'$ ( $m^3/h$ )	Sí	Sí	No	No
$T$ ( $^{\circ}C$ )	Sí	Sí	Sí	Sí

Tabla 10: Estimaciones para las variables del intercambiador de calor.

Sensores	pi	po	si	so
$F'$ ( $m^3/h$ )	2.04	2.03	2.25	2.25
$T$ ( $^{\circ}C$ )	38.73	55.21	63.70	48.75

Tabla 11: Valores estimados para el intercambiador de calor.

DE%	$ct$	$Q$ (kJ/h)	$UA$ (kJ/(h $\cdot^{\circ}C$ ))
16.00	10	$1.408 \times 10^5$	$1.521 \times 10^4$

Tabla 12: Errores en % para las estimaciones de las variables del intercambiador de calor.

Sensores	pi	po	si	so
$F'$	-3.18	0.38	-2.00	-2.50
$T$	2.00	1.50	12.44	12.44

Tabla 13: Errores en % de los valores estimados para el intercambiador de calor.

$Q$	$UA$
12.43	21.48



## Conclusiones

En este trabajo, se presentó un método para determinar cuántos y cuáles sensores se deben instalar en un sistema, en estado estacionario, para poder estimar los valores de las variables y de los parámetros con la mínima varianza y con el mínimo costo de instrumentación. Se analizaron dos alternativas, un modelo riguroso y otro simplificado. La aplicación del modelo simplificado en un ejemplo mostró el significativo impacto que puede tener en la calidad de la estimación y en la economía de la instrumentación. En efecto, el modelo recomendó una inversión de 11 unidades de costo, mientras que una instrumentación completa habría costado 16 unidades de costo. Por otra parte, la instrumentación recomendada logra una desviación estándar máxima del 14.00%, mientras que la instrumentación que se obtiene con una unidad de costo menor alcanza un 16.00% de desviación.

Los errores de las estimaciones tienen su origen en una suma de factores: los errores de los sensores del 5%, las aproximaciones realizadas en el modelo (y  $C_p$  constantes, diferencia de temperatura promedio); pero sobre todo, en las pocas medidas tomadas. En el ejemplo analizado, sólo se consideró una lectura por cada sensor instalado, lo cual es correcto si el modelo será utilizado para realizar estimaciones en línea (on line) con la planta. Sin embargo, si lo que se desea es realizar una estimación precisa de los parámetros, deberían tomarse varias lecturas por cada sensor para realizar la estimación. La adaptación del modelo presentado para esta nueva situación es directa, siendo una alternativa la que se utilizó en el ejemplo presentado, donde puede considerarse que la lectura de un caudal de entrada mide la misma variable que la lectura del correspondiente caudal de salida. En ese caso, la resolución del modelo no sólo recomendará la instrumentación a instalar, sino también cuántas lecturas deberían tomarse de cada sensor.

## Bibliografía

- Abu-el-zeet Z.H., Roberts P.D., Becerra V.M., "Enhancing Model Predictive Control Using Dynamic Data Reconciliation", *AIChE Journal*, 48(2), pp.324-333, 2002.
- Amand T., Heyen G., Kalitventzeff B., "Synergy between data reconciliation and principal component analysis: Plant monitoring and fault detection", *Computers & Chemical Engineering*, 25, pp.501-507, 2001.
- Edgar T., Himmelblau D., Lasdon L., *Optimization of Chemical Processes.*, 2 edn. Chemical Engineering Series, McGraw-Hill International, Singapore, 2001.
- Lid, T., Skogestad, S., "Data reconciliation and optimal operation of a catalytic naphtha reformer", *Modeling, Identification and Control*, 29 (4), pp. 117-129, 2008.
- Narasimhan S., Jordache C., *Data Reconciliation Gross Error Detection. An Intelligent Use of*



Process Data, Gulf Publishing Company, Houston, Texas, 2000.

Romagnoli J.A., Sánchez M.C., Data Processing and Reconciliation for Chemicals Process Operations, Academic Press, San Diego, 2000.

Tona Vázquez R.V., Estrategias de Análisis y Exploración de Datos como Soporte a la Operación y Supervisión de Procesos Químicos, tesis doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, 2006.